

Mulțimi definite printr-o proprietate

Învăț să descrii o mulțime prin proprietatea comună a elementelor sale și să determini corect elementele care verifică o condiție dată.

CLASA A VIII-A

În această lecție vei învăța:

- ce înseamnă o mulțime definită printr-o proprietate;
- cum citești $A = \{x \in M \mid P(x)\}$;
- cum determini elementele;
- cum verifici apartenența;
- cum folosești corect mulțimea de referință.

1. Cum poate fi definită o mulțime?

O mulțime poate fi descrisă prin enumerarea elementelor sale sau prin precizarea unei proprietăți comune.

Prin enumerare

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Sunt scrise explicit elementele.

Printr-o proprietate

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$$

Sunt precizate numerele naturale cu $x < 5$.

Observă: $\{0, 1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$.

2. Mulțimi definite printr-o proprietate

Proprietatea caracteristică este îndeplinită de toate elementele mulțimii și nu este îndeplinită de elementele care nu aparțin acesteia.

$$A = \{x \in M \mid P(x)\}$$

$x \in M$

arată din ce mulțime poate fi ales x .

$P(x)$

este proprietatea pe care trebuie să o verifice x .

Cum citim? A este mulțimea elementelor x din M astfel încât x verifică proprietatea P .

3. Cum determinăm elementele mulțimii?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 < 10\}$$

Rezolvăm: $2x + 1 < 10 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < 9/2$. Deoarece $x \in \mathbb{N}$:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Important: ținem cont și de mulțimea din care poate fi ales x .

4. Metodă de rezolvare

1. Identifică mulțimea de referință. 2. Identifică proprietatea. 3. Rezolvă condiția. 4. Păstrează numai valorile admise.

5. Mulțimea de referință este importantă

Numere naturale

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Numere întregi

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Atenție: păstrăm numai valorile care aparțin mulțimii precizate.

6. Proprietatea poate conține o inegalitate

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

Numerele întregi admise sunt:

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Atenție la semne: la $x < 2$, numărul 2 nu este admis; la $x \leq 2$, este admis.

7. Proprietatea poate conține valoarea absolută

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$$

$|x| \leq 3$ înseamnă că distanța de la x la zero este cel mult 3, deci $-3 \leq x \leq 3$.

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

8. Cum verificăm dacă un număr aparține mulțimii?

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$$

Pentru -4 : avem $-4 \in \mathbb{Z}$ și $|-4| = 4 < 5$. Prin urmare:

$$-4 \in D$$

Regulă: numărul trebuie să aparțină mulțimii de referință și să verifice proprietatea.

9. Proprietăți care cer ca o expresie să fie număr întreg

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6/(x + 1) \in \mathbb{Z}\}$$

$x + 1$ trebuie să fie un divizor nenul al lui 6: $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ sau 6.

$$E = \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}$$

Atenție: numitorul nu poate fi zero, deci $x = -1$ nu este admis.

10. Nu confundăm $\in$ cu $\subseteq$

Apartenența

$2 \in \{1, 2, 3\}$
2 este element al mulțimii.

Incluziunea

$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
 $\{1, 2\}$ este submulțime.

Reține: $\in$ se folosește între un element și o mulțime; $\subseteq$ între două mulțimi.

De reținut

- O mulțime poate fi descrisă prin enumerare sau prin proprietatea caracteristică.
- $A = \{x \in M \mid P(x)\}$ conține elementele x din M care verifică $P(x)$.
- Simbolul $|$ se citește „astfel încât”.
- Ținem cont de proprietate și de mulțimea de referință.
- $\in$ exprimă apartenența, iar $\subseteq$ incluziunea.

Verifică dacă ai înțeles

1. Scrie prin enumerare: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$.
2. Determină: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 3\}$.
3. Determină: $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$.
4. Stabilește dacă $-3 \in D$, unde $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$.
5. Scrie printr-o proprietate $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
6. Explică diferența dintre $\in$ și $\subseteq$.